

B.A. DEGREE EXAMINATION – NOVEMBER/DECEMBER, 2017.

THIRD SEMESTER

Part II : MATHEMATICS

Paper – III : ABSTRACT ALGEBRA

(New Regulation 2016 – 17)

(Common Paper for B.A./B.Sc.)

Time : 3 Hours

Max. Marks : 75

SECTION – A

Answer any FIVE of the following.

(5 × 5 = 25 marks)

1. Prove that cube roots of unity form an abelian group w.r.t multiplication.

1 యొక్క ఘనమూలాల సమితి గుణకారందృష్ట్యా వినిమయ సమూహము అని చూపండి.

2. In a group G prove that the inverse of any element is unique.

సమూహము G లో ఏదేని మూలకము యొక్క విలోమం ఏకైకము అని చూపండి.

3. Prove that the intersection of two subgroups H_1 and H_2 of a group of G is a subgroup of G .

ఒక సమూహము G లో H_1, H_2 లు రెండు ఉపసమూహాలు అయిన వాటి ఛేదనము కూడా ఆ సమూహానికి ఉపసమూహము అగును అని చూపండి.

4. $z_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ and $H = \{0, 2, 4\}$ then find the index of H w. r. to addition modulo 6.

$z_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ మరియు $H = \{0, 2, 4\}$ అయిన సంకలనమాపము 6 దృష్ట్యా H యొక్క సూచికను కనుగొనుము.

5. Prove that H of a group G is normal iff $xH^{-1}x = H, \forall x \in G$.

G లో ఉపసమూహం H అభిలంబ ఉపసమూహం కావడానికి అవశ్యక పర్వాస్త నియమము $xH^{-1}x = H, \forall x \in G$

6. A subgroup H of a group G is normal iff each left coset of H in G is a right coset of H in G .

సమూహము G లో ఉపసమూహము H అభిలంబ ఉపసమూహము కావడానికి అవశ్యక పర్వాస్తనియమము G లో H యొక్క ప్రతి ఎడమ సహసమితి, G లో H యొక్క కుడి సహసమితి అవుతుంది.

Turn Over

7. If f is a homomorphism of a group G into a group G' , then the Kernel of f is a normal subgroup of G .
 సమూహము G నుండి సమూహము G' కు f ఒక సమరూపత అయితే $\ker f$ అనేది G లో సమరూపత ఉపసమూహము అగును అని చూపుము.
8. If G is a group and $\phi: G \rightarrow G$ is defined as $\phi(x) = x^{-1} \forall x \in G$ then show that ϕ is not a homomorphism.
 సమూహము G లో $\phi: G \rightarrow G$ ప్రమేయము $\phi(x) = x^{-1} \forall x \in G$ గా నిర్వచించబడితే ϕ సమరూపత కాదు అని చూపండి.
9. Express the product $(2\ 5\ 4)(1\ 4\ 3)(2\ 1)$ as a product of disjoint-cycles and find its inverse.
 $(2\ 5\ 4)(1\ 4\ 3)(2\ 1)$ అనే లబ్ధాన్ని వియుక్త చక్రాల లబ్ధముగా వ్రాయుము మరియు దాని విలోమము కనుక్కోండి.
10. Every cyclic group is an abelian.
 ప్రతిచక్రియ సమూహము వినిమయము.

SECTION - B

Answer ALL questions.

(5 × 10 = 50 marks)

Each question carries 10 marks.

UNIT I

11. Prove that $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ is an abelian group of order 6 w.r. to multiplication modulo 7.
 $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ అనునది పరిమాణం 6 గా కలిగిన సమితి అయితే గుణకారమాపము 7 ద్వారా వినిమయసమూహము అని చూపుము.

Or

12. The order of every element of a finite group G is finite and is less than or equal to the order of the group ($O(a) \leq O(G)$).
 $(O(a) \leq O(G))$ పరిమిత సమూహము G యొక్క ప్రతి మూలకము పరిమాణము పరిమితము మరియు అది ఆ సమూహము పరిమాణమును మించదు.

UNIT II

13. (a) Define a subgroup.
 ఉపసమూహమును నిర్వచించండి.
- (b) H is a non-empty complex of a group G , the necessary and sufficient condition for H to be a subgroup of G then $a, b \in H \Rightarrow a \cdot b^{-1} \in H$.
 ఒక సమూహం G లో H శూన్యేతర కాంప్లెక్స్, G లో H ఉపసమూహము అగుటకు అవశ్యక పర్యాప్త నియమము $a, b \in H \Rightarrow a \cdot b^{-1} \in H$.

Or

14. Any two right (left) cosets of a subgroup are either disjoint or identical.
 ఉపసమూహము యొక్క రెండు కడి(ఎడమ) సహసమితులు వియుక్తాలు లేదా సమానాలు.

UNIT III

15. (a) Define normal subgroup.

అభిలంబ ఉపసమూహమును నిర్వచించుము.

- (b) If H is a normal subgroup of G . Prove that the set G/H of all cosets of H in G w.r.to coset multiplication is a group.

G లో H ఒక అభిలంబ ఉపసమూహము. G లోని H యొక్క సహసమితుల సమితి G/H సహసమితుల గుణకారము దృష్ట్యా ఒక సమూహము అని చూపండి.

Or

16. If M, N are two normal subgroups of G such that $M \cap N = \{e\}$. Then every element of M Commutes with every element of N .

G లో M, N లు రెండు అభిలంబ ఉపసమూహాలు మరియు $M \cap N = \{e\}$ అయితే M లో ప్రతి మూలకము N లోని ప్రతి మూలకముతో వినిమయము అవుతుంది.

UNIT IV

17. State and prove fundamental theorem of homomorphism an groups.

సమూహాల సమరూపతా మూలసిద్ధాంతమును ప్రవచించి నిరూపించుము.

Or

18. If f is a homomorphism of a group G into a group G' . Show that $\ker f$ is a normal subgroup of G .

సమూహము G నుండి సమూహము G' కు f సమరూపత అయితే G కి $\ker f$ అభిలంబ ఉపసమూహము అని చూపుము.

UNIT V

19. State and prove cayley's theorem.

కెయిలీ సిద్ధాంతమును నిర్వచించి నిరూపించుము.

Or

20. Show that every subgroup of a cyclic group is cyclic.

చక్రీయ సమూహము యొక్క ప్రతి ఉపసమూహము చక్రీయమని చూపుము.